Análise Harmônica Diádica e a Conjectura A_2

Jean Carlo Pech de Moraes*

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Resumo

A classe de pesos A_p foi introduzida por Muckenhoupt [5] como todas as funçõees positivas w, tal que a função maximal de Hardy-Littlewood mapeia $L^p(w)$ nele mesmo. Precisamente, nós dizemos que uma função w, localmente integrável e positiva quase sempre, satisfaz a condição A_p se:

$$[w]_{A_p} := \sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} < \infty$$

onde o supremo é tomado sobre todos os intervalos da reta real e $[w]_{A_p}$ denota a característica A_p do peso. Em 1973, Hunt, Muckenhoupt, e Wheeden mostraram que a transformada de Hilbert é limitada em $L^p(w)$ se e somente se $w \in A_p$. Também em 1973, Coiffman e Fefferman [1] estenderam este resultado para todos os operadores Calderón-Zygmund. Anos depois da obtenção destes importantes resultados na Teoria de Pesos, matemáticos se interessaram em estudar como a norma, em $L^p(w)$, destes operadores dependiam da característica A_p do peso w. Quarenta anos após a classe A_p foi descoberta, Tuomas Hytönen provou o seguinte:

Teorema 1. [2] *Seja T um operador Calderón-Zigmund e w um peso A_p. Então, para $1 < p < \infty$,*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C[w]_{A_p}^{\max\{1,1/(p-1)\}} \|f\|_{L^p(w)},$$

onde a constante C não depende da característica A_p de w.

Este resultado havia sido conjecturado por Carlos Peréz alguns anos atrás e esta conjectura ficou conhecida como Conjectura A_2.

Nesta palestra vamos fazer um apanhado sobre a conjectura A_2 e mostrar como as ferramentas de Análise Harmônica Diádica desempenharam um papel fundamental na sua demonstração. Além disso, discutiremos alguns problemas atuais de Teoria de Pesos, como o problema de dois pesos, onde se busca condições necessárias e suficientes sobre um par de pesos (u, v) tal que um dado operador mapeie $L^p(u)$ em $L^p(v)$. Condições deste tipo são conhecidas apenas para uma classe muito pequena de operadores.

Referências

[1] R. Coiffman, C. Fefferman. *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*. Studia Math. 51 (1974), 241-250.

[2] T. Hytönen, *The sharp Weighted Bound for general Calderón-Sygmund Operators*. To appear Ann. Math. (2013)

[3] N.H. Katz, M. C. Pereyra, *On the two weight problem for the Hilbert transform*. Revista Matemática Iberoamericana 13 01 (1997), 211-242.

[4] J. C. Moraes and M. C. Pereyra, *Weighted estimates for dyadic Paraproducts and T-Haar multiplies with complexity* (m, n). To appear Pub. Mat. (2013).

[5] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function*. Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-226.